

1. Лаплас теңдеуі

Нүктелік көзден шығатын шешім ізделеді:

$$\Delta u(x) = \delta(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

мұндағы δ — Дирак дельта функциясы, x_0 — көздің орны.

Бұл $u(x)$ — Лаплас теңдеуі үшін іргелі шешім немесе **fundamental solution**.

2. 2 өлшемді кеңістік ($n = 2$)

$$\Delta u(x) = \delta(x)$$

Поляр координаттарда (немесе радиалды симметрия арқылы) шешім деп аламыз $u = u(r)$, $r = |x|$.

Лаплас оператор радиалды жағдайда:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = \delta(r)$$

- $r > 0$ үшін $\delta(r) = 0$:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = 0.$$

- Бұл теңдеудің шешімі:

$$u_r = \frac{C}{r} \Rightarrow u(r) = C \ln r + D.$$

Дирк дельта қасиетін қанағаттандыру үшін:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Delta u \, dx dy = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi}.$$

Сондықтан 2D іргелі шешім:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x|.$$

3. 3 өлшемді кеңістік ($n = 3$)

Радиалды симметрияны қолдансақ $r = |x|$, онда Лаплас оператор:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r = 0, \quad r > 0.$$

- Бұл теңдеудің шешімі:

$$u_r = \frac{C}{r^2} \Rightarrow u(r) = -\frac{C}{r} + D.$$

Дельта функция қасиеті бойынша $C = \frac{1}{4\pi}$.

Сондықтан 3D іргелі шешім:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi|x|}.$$

4. Жалпы n -өлшемді кеңістік

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x|, & n = 2, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases}$$

мұндағы $\omega_n = n$ -өлшемді сфераның ауданы:

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

Бұл — Лаплас теңдеуінің іргелі шешімі (fundamental solution).

5. Қолдану

- Грин функциясын құру: Іргелі шешімді шекаралық шарттарға бейімдеп қолданамыз.
- Пуассон теңдеуі үшін интегралдық шешім:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy$$

1. Гармоникалық функцияның анықтамасы

Анықтама: Функция $u(x)$ (немесе $u(x_1, \dots, x_n)$) **гармоникалық** деп аталады егер ол Лаплас теңдеуін қанағаттандырса:

$$\Delta u = 0, \quad \text{мұндағы } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

- 2 өлшемде: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$
- 3 өлшемде: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$

2. Мысалдар

1. Сызықтық функциялар: $u(x, y) = ax + by + c$
2. Потенциал функциялары: $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ (2D)
3. Радиалды симметриялы функциялар (3D): $u(x) = \frac{1}{|x|}$

Барлығы $\Delta u = 0$ шартын қанағаттандырады.

3. Негізгі қасиеттері

3.1. Шектік максимум және минимум қасиеті

Егер u гармоникалық болса және жабық доменде үздіксіз болса:

- u -ның максимумы және минимумы тек шекарада пайда болады.
- Бұл **Maximum Principle** деп аталады.

Салдары: Гармоникалық функцияның ішінде локальды максимум немесе минимум болмайды.

3.2. Орташа мән қасиеті (Mean Value Property)

Шеңбер немесе сфера ішіндегі гармоникалық функция үшін:

$$u(x_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|x-x_0|=r} u(x) ds \quad (2D)$$

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B_r} u(x) dS \quad (nD)$$

- Яғни, гармоникалық функцияның мәні орталықта шеңбер (немесе сфера) бойынша орта мәнге тең.

3.3. Жүйелілік (Analyticity / Smoothness)

- Гармоникалық функция C^∞ (барлық ретті туындылары бар) және аналитикалық.
- Кез келген нүктеде Тейлор сериясына жіктеуге болады.

3.4. Гармоникалық конъюгат (2D)

- Егер $u(x, y)$ 2D-де гармоникалық болса, онда кейде бар $v(x, y)$, осылайша $f(z) = u + iv$ — аналитикалық функция.
- Бұл гармоникалық конъюгат деп аталады.

3.5. Лаплас операторының линейлілігі

- Егер u_1, u_2 гармоникалық болса, $au_1 + bu_2$ да гармоникалық.
-

3.6. Грин формуласы мен интегралдық қасиеттері

- Гармоникалық функция шекара шарттарымен толық анықталады (Dirichlet / Neumann есептері).
- Сызықтық комбинациялар, шекарадағы мәндер арқылы ішкі мәнді есептеуге болады.

1. Грин функциясының анықтамасы

Анықтама:

Домен $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ үшін Лаплас операторы Δ және шекаралық шарттар берілсін. Грин функциясы $G(x, \xi)$ деп аталады, егер:

$$\begin{cases} \Delta_x G(x, \xi) = \delta(x - \xi), & x \in \Omega, \\ G(x, \xi) = 0, & x \in \partial\Omega \text{ (немесе басқа шекара шарттары)}, \end{cases}$$

мұндағы $\delta(x - \xi)$ — Дирак дельта функциясы, $\xi \in \Omega$ — көз нүктесі.

- $G(x, \xi)$ — x бойынша шешім, ал ξ параметр ретінде қаралады.
 - Грин функциясы Лаплас теңдеуі үшін іргелі шешімнің модификацияланған нұсқасы деп айтуға болады.
-

2. Мақсаты

- Пуассон теңдеуі үшін шекаралық есепті шешу:

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

Грин функциясын пайдалану арқылы шешім:

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

- Яғни, $u(x)$ әрбір нүктеде $f(\xi)$ көздерінен «қосынды» түрінде есептеледі.
-

3. Грин функциясының қасиеттері

3.1. Симметрия

$$G(x, \xi) = G(\xi, x)$$

- Бұл қасиет көбінесе Лаплас операторына тән симметриядан шығады.
-

3.2. Шекаралық шарттарды қанағаттандыру

$$G(x, \xi) = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (\text{Dirichlet})$$

- Нәтижесінде интегралдық формула арқылы $u(x)$ шекаралық шартты қанағаттандырады.
-

3.3. Сингулярлық мінез

- $x \rightarrow \xi$ болғанда $G(x, \xi)$ іргелі шешімге ұқсас болады:
 - 2D: $G(x, \xi) \sim \frac{1}{2\pi} \ln |x - \xi|$
 - 3D: $G(x, \xi) \sim \frac{1}{4\pi|x-\xi|}$

3.4. Линиялықтық

- Егер u_1, u_2 шешімдер болса және a, b — тұрақтылар:

$$G[af_1 + bf_2] = aG[f_1] + bG[f_2]$$

- Бұл Лаплас оператордың сызықтық қасиетінен шығады.
-

3.5. Позитивтілік (кейбір жағдайларда)

- Егер $f(x) \geq 0$ болса, кейбір домендерде $G(x, \xi) \geq 0$ және шешім $u(x) \geq 0$ болады.
-

4. Қолданылуы

- Пуассон теңдеуі:

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

- Гармоникалық функцияны құру:

- $\Delta u = 0$ болса, шекарадағы мәндер бойынша Грин функциясы арқылы шешім табуға болады.

- Физикалық интерпретация:

- $G(x, \xi)$ — бірлік «көзден» шығатын потенциал, шекаралық шарттарды қанағаттандыра отырып.